Densité des polynômes orthogonaux

Théorème 1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < \infty$, alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

Démonstration.

On rappelle que $\rho : I \to \mathbb{R}$ est une fonction poids si elle est mesurable et strictement positive, et si elle vérifie :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$$

$L^2(I, \rho) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_I |f(x)|^2 \rho(x)\, dx < +\infty \right\}$ est un espace de Hilbert s'il est muni du produit scalaire :

$$\forall\, f, g \in L^2(I, \rho),\ \langle\, f\, ,\, g\, \rangle_\rho = \int_I f(x)g(x)\rho(x)\, dx$$

Remarquons que, comme $(x \mapsto x^n) \in L^1(I, \rho)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\|x^n\|_2^2 = \int_I |x^n|^2 \rho(x)\, dx = \int_I |x^{2n}|\rho(x)\, dx = \left\|x^{2n}\right\|_1 < +\infty$$

Les polynômes appartiennent donc à $L^2(I, \rho)$, et nous pouvons bien appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt pour avoir une famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degrés échelonné et orthogonaux dans $L^2(I, \rho)$.

$$(P_n)_n \text{ est une base hilbertienne } \Leftrightarrow \overline{\mathrm{Vect}((P_n)_n)} = \overline{\mathrm{Vect}((X^n)_n)} = L^2(I, \rho) \Leftrightarrow \mathrm{Vect}((X^n)_n)^\perp = \{0\}$$

On cherche donc à montrer que l'orthogonal de $\mathrm{Vect}((X^n)_n)$ dans $L^2(I, \rho)$ est $\{0\}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n$. Soit $f \in L^2(I, \rho)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle\, f\, ,\, g_n\, \rangle_\rho = 0$.
Soit $\varphi = f\rho\mathbb{1}_I$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, dt = \int_I |f(t)|\rho(t)\, dt \underset{\substack{Cauchy\\-Schwarz}}{\leqslant} \left(\int_I |f(t)|^2\rho(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \rho(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_\rho\, \|1\|_\rho < +\infty$$

Donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, et on peut alors considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \hat{\varphi}(t) = \int_I e^{-itx}\varphi(x)\, dx = \int_I e^{-itx} f(x)\rho(x)\, dx$$

Montrons que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ensemble $B_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\alpha}{2} \right\}$, où $\alpha > 0$.
Pour tout $x \in I$ et tout $z \in B_\alpha$, on pose $g(z,x) = e^{-itx}f(x)\rho(x)$ et $F(z) = \int_I g(z,x)\, dx$, alors :

(i) Pour tout $z \in B_\alpha$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.

(ii) Pour presque tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_α.

(iii) Pour tout $z \in B_\alpha$, on a $|g(z,x)| = e^{\mathrm{Im}(z)x}|f(x)|\rho(x) \leqslant e^{\frac{\alpha}{2}x}|f(x)|\rho(x)$. Or :

$$\int_I e^{\frac{\alpha}{2}x}|f(x)|\rho(x)\, dx \underset{\substack{Cauchy\\-Schwarz}}{\leqslant} \left(\int_I e^{\alpha x}\rho(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$|g(z,x)|$ est donc bien dominée par une fonction indépendante de z et intégrable sur I.

Par le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, F est bien définie et holomorphe sur B_α, et coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, on a également :

$$F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(z,x)\, dx = (-i)^n \int_I x^n e^{-ixz} f(x)\rho(x)\, dx$$

Évaluons en 0 :

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\, dx = (-i)^n \, \langle f \, , \, g_n \rangle_\rho = 0$$

Tous les coefficients du développement en série entière de F au voisinage de 0 sont donc nuls. Par unicité du développement en série entière, F est nulle sur un voisinage de 0. Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_α tout entier, et en particulier sur $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\hat{\varphi}(t) = 0$. Or $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, donc, par injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, on en déduit que $\varphi = f\rho\mathbb{1}_I = 0$. Comme, sur I, on a $\rho > 0$ et $\mathbb{1}_I = 1 > 0$, il vient que $f = 0$.

On a donc finalement que $\mathrm{Vect}((X^n)_n)^\perp = \{0\}$, et donc que les polynômes orthogonaux forment bien une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

□

Références

[BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*